ÜBER DIE ANWENDUNG

DER

JACOBI-HAMILTON'SCHEN METHODE

AUF

DEN FALL DER ANZIEHUNG

NACH DEM ELECTRODYNAMISCHEN GESETZE VON WEBER.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

INAUGURAL-DISSERTATION

WELCHE MIT

GENEHMIGUNG DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER UNIVERSITÄT

HALLE-WITTENBERG

ZUR

ERWERBUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

ZUGLEICH MIT DEN THESEN

AM 15. JUNI 1870

ÖFFENTLICH VERTHEIDIGEN WIRD DER VERFASSER

FERDINAND GUSTAV HOLZMÜLLER

AUS MERSEBURG

GEGEN

KARL AUGUST BÖTTCHER, STUD. MATH.

IULIUS RICHARD ZEHENDER, STUD. MATH.

HALLE.

DRUCK VON EHRHARDT KARRAS.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534918_0117

Seiner Magnificenz

Herrn Professor Dr. Herrmann Knoblauch

und

Herrn Professor Dr. Eduard Heine

in dankbarer Verehrung

gewidmet

vom

Verfasser.

§ 1.

Einleitung.

In seinen Vorlesungen über Dynamik beschränkt sich Jacobi bei der Anwendung der Hamilton'schen Methode auf solche Probleme, bei welchen die Bewegung nur von der Configuration der Punkte, nicht aber von ihren Geschwindigkeiten abhängt. Diese Methode lässt sich jedoch, wie bereits Riemann bemerkt hat, auch auf manche Probleme anwenden, bei denen die Geschwindigkeiten in Frage kommen.

Handelt es sich um die gegenseitige Anziehung von Punkten und versteht man unter T die halbe lebendige Kraft, unter U diejenige Function, welche, nach den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes differentiirt, die Componenten der in jenem Punkte wirkenden Kraft giebt, so gilt, wenn U nur die Coordinaten und ausserdem die Zeit implicite oder explicite enthält, nicht aber von den Geschwindigkeiten abhängt, die Gleichung

$$1) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt = 0.$$

Dabei wird die Variation so verstanden, dass die Grenzen nicht mit variirt werden. Diese Gleichung behält ihre Geltung auch dann, wenn Bedingungsgleichungen vorhanden sind, welche die Zeit enthalten dürfen; von solchen wollen wir jedoch ganz absehen.

Das Bestehen der Gleichung 1) wird als erstes Erforderniss von der Hamilton'schen Methode vorausgesetzt. Sie folgt aus den gewöhnlichen Gleichungen der Bewegung und umgekehrt lassen sich die letzteren aus ihr ableiten.

Enthält nun aber U die Geschwindigkeiten, so ist es fraglich, ob aus der Gleichung 1) die gewöhnlichen Gleichungen der Bewegung folgen würden. Es muss also bei jedem Probleme untersucht werden, ob dies stattfindet oder nicht. Im ersteren Falle dürfen wir von jener Gleichung ausgehen, im anderen nicht. Sollte es uns aber im letzteren gelingen, eine andere Function U so zu bestimmen, dass, wenn wir sie an Stelle des früheren U in die Gleichung 1) einsetzen, aus derselben die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen folgen, so können wir diese neue Gleichung an die Spitze der weiteren Untersuchung stellen.

Eine allgemeinere Methode, dieses neue U zu finden, haben wir noch nicht. Einige kurze Bemerkungen über den Fall, wo das Potential aus zwei Theilen besteht, deren einer die Geschwindigkeiten enthält, während der andere frei von ihnen ist, gab Riemann in seinen Vorlesungen.

Ist jenes U auf irgend eine Weise gefunden, so werden independente Coordinaten $q_1 \ldots . q_\nu$ und, um die Differentialquotienten zu entfernen, neue Grössen $p_1 \ldots . p_\nu$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial q'_\mu} = p_\mu$$

eingeführt und aus der Gleichung 1) die Differentialgleichungen des Problems in den independenten Coordinaten abgeleitet. Die Hamilton'sche Methode ersetzt das System von Differentialgleichungen durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit $(\nu+1)$ Variabelen, deren allgemeine Lösung V zu suchen ist, welche also ausser der additiven Constanten α noch ν andere arbiträre Constanten $\alpha_1 \ldots . \alpha_\nu$ enthält.

Gelingt es uns dann, nachzuweisen, dass die 2ν Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots . , \frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu} = \beta_\nu,$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \ldots . , \frac{\partial V}{\partial q_\nu} = p_\nu,$$

wo die β neue willkürliche Constanten sind, die Integralgleichungen des obigen Systems von Differentialgleichungen sind, so war die Anwendung der Hamilton'schen Methode gerechtfertigt und das Problem ist auf die Ausführung gewisser Integrale reducirt. Gelingt uns aber dieser Beweis nicht, so sind die Resultate illusorisch.

Der allgemeine Beweis für den Fall, dass U nur die Coordinaten und die Zeit implicite oder explicite, nicht aber die Geschwindigkeiten enthält, findet sich bei Jacobi in der 20. Vorlesung. Für solche Fälle aber, wo U die Geschwindigkeiten enthält, ist stets eine besondere Untersuchung nöthig.

Für das hierher gehörende Problem der Anziehung nach dem electrodynamischen Gesetze von Weber hat Neumann* auf einem eigenthümlichen Wege den Ausdruck U, welcher in die Gleichung 1) einzusetzen ist, gefunden und dadurch jenem Gesetze eine neue Bedeutung gegeben.

Dieses interessante Gesetz wird schon jetzt vielen Untersuchungen zu Grunde gelegt, scheint jedoch nach der Ansicht vieler Forscher berufen zu sein, in späterer Zeit eine noch grössere Rolle zu spielen. Sicher hat es grosse Wichtigkeit schon insofern, als es das Newton'sche als speciellen Fall in sich schliesst.

Wir wollen in Folgendem untersuchen, ob sich die Hamilton'sche Methode auf dieses Problem anwenden lässt, und zwar soll zunächst erörtert werden die Bewegung eines Punktes, welcher nach dem Weber'schen Gesetze von einem festen Centrum angezogen wird.

Ehe wir jedoch zu der eigentlichen Untersuchung übergehen, sind die nöthigen Bemerkungen über den Zusammenhang des Weber'schen mit dem Neumann'schen Ausdrucke vorauszuschicken.

Ist r die Entfernung des Punktes xyz von dem anziehenden Centrum, und m seine Masse, dann ist die in der Richtung von r wirkende Anziehung nach Weber:

$$2) \qquad R = -\frac{m}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Hier ist c eine sehr grosse Constante und zwar, wie man vermuthet, ungefähr die Geschwindigkeit des Lichtes.

Die gewöhnliche Kräftefunction würde also sein:

$$3) \qquad U_1 = \frac{m}{r}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right).$$

Es ist klar, dass die Bewegung des Punktes in einer Ebene stattfindet, welche durch die Richtung von r und die des anfänglichen Stosses bestimmt wird; denn es ist kein Grund vorhanden, welcher den Punkt bestimmen sollte, diese Ebene zu verlassen. Wir beschränken uns also auf zwei Coordinaten.

Die Bewegungsgleichungen sind

$$4) \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = R\,\dfrac{x}{r} = \dfrac{\partial U_1}{\partial r}\cdot\dfrac{x}{r}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = R\,\dfrac{y}{r} = \dfrac{\partial U_1}{\partial r}\cdot\dfrac{y}{r}, \end{cases}$$

aus diesen folgt, wie leicht zu sehen:

---

* Neumann, Principien der Electrodynamik, Tübingen 1868. — Vergl. auch Seegers, Inauguraldissertation: *De motu perturbationibusque planetarum etc.* Göttingen 1864.

Das Bestehen der Gleichung 1) wird als erstes Erforderniss von der Hamilton'schen Methode vorausgesetzt. Sie folgt aus den gewöhnlichen Gleichungen der Bewegung und umgekehrt lassen sich die letzteren aus ihr ableiten.

Enthält nun aber U die Geschwindigkeiten, so ist es fraglich, ob aus der Gleichung 1) die gewöhnlichen Gleichungen der Bewegung folgen würden. Es muss also bei jedem Probleme untersucht werden, ob dies stattfindet oder nicht. Im ersteren Falle dürfen wir von jener Gleichung ausgehen, im anderen nicht. Sollte es uns aber im letzteren gelingen, eine andere Function U so zu bestimmen, dass, wenn wir sie an Stelle des früheren U in die Gleichung 1) einsetzen, aus derselben die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen folgen, so können wir diese neue Gleichung an die Spitze der weiteren Untersuchung stellen.

Eine allgemeinere Methode, dieses neue U zu finden, haben wir noch nicht. Einige kurze Bemerkungen über den Fall, wo das Potential aus zwei Theilen besteht, deren einer die Geschwindigkeiten enthält, während der andere frei von ihnen ist, gab Riemann in seinen Vorlesungen.

Ist jenes U auf irgend eine Weise gefunden, so werden independente Coordinaten $q_1 \ldots . q_\nu$ und, um die Differentialquotienten zu entfernen, neue Grössen $p_1 \ldots . p_\nu$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial q'_\mu} = p_\mu$$

eingeführt und aus der Gleichung 1) die Differentialgleichungen des Problems in den independenten Coordinaten abgeleitet. Die Hamilton'sche Methode ersetzt das System von Differentialgleichungen durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit $(\nu+1)$ Variabelen, deren allgemeine Lösung V zu suchen ist, welche also ausser der additiven Constanten α noch ν andere arbiträre Constanten $\alpha_1 \ldots . \alpha_\nu$ enthält.

Gelingt es uns dann, nachzuweisen, dass die 2ν Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots . , \frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu} = \beta_\nu,$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \ldots . , \frac{\partial V}{\partial q_\nu} = p_\nu,$$

wo die β neue willkürliche Constanten sind, die Integralgleichungen des obigen Systems von Differentialgleichungen sind, so war die Anwendung der Hamilton'schen Methode gerechtfertigt und das Problem ist auf die Ausführung gewisser Integrale reducirt. Gelingt uns aber dieser Beweis nicht, so sind die Resultate illusorisch.

Der allgemeine Beweis für den Fall, dass U nur die Coordinaten und die Zeit implicite oder explicite, nicht aber die Geschwindigkeiten enthält, findet sich bei Jacobi in der 20. Vorlesung. Für solche Fälle aber, wo U die Geschwindigkeiten enthält, ist stets eine besondere Untersuchung nöthig.

Für das hierher gehörende Problem der Anziehung nach dem electrodynamischen Gesetze von Weber hat Neumann* auf einem eigenthümlichen Wege den Ausdruck U, welcher in die Gleichung 1) einzusetzen ist, gefunden und dadurch jenem Gesetze eine neue Bedeutung gegeben.

Dieses interessante Gesetz wird schon jetzt vielen Untersuchungen zu Grunde gelegt, scheint jedoch nach der Ansicht vieler Forscher berufen zu sein, in späterer Zeit eine noch grössere Rolle zu spielen. Sicher hat es grosse Wichtigkeit schon insofern, als es das Newton'sche als speciellen Fall in sich schliesst.

Wir wollen in Folgendem untersuchen, ob sich die Hamilton'sche Methode auf dieses Problem anwenden lässt, und zwar soll zunächst erörtert werden die Bewegung eines Punktes, welcher nach dem Weber'schen Gesetze von einem festen Centrum angezogen wird.

Ehe wir jedoch zu der eigentlichen Untersuchung übergehen, sind die nöthigen Bemerkungen über den Zusammenhang des Weber'schen mit dem Neumann'schen Ausdrucke vorauszuschicken.

Ist r die Entfernung des Punktes xyz von dem anziehenden Centrum, und m seine Masse, dann ist die in der Richtung von r wirkende Anziehung nach Weber:

$$2) \qquad R = -\frac{m}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Hier ist c eine sehr grosse Constante und zwar, wie man vermuthet, ungefähr die Geschwindigkeit des Lichtes.

Die gewöhnliche Kräftefunction würde also sein:

$$3) \qquad U_1 = \frac{m}{r}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right).$$

Es ist klar, dass die Bewegung des Punktes in einer Ebene stattfindet, welche durch die Richtung von r und die des anfänglichen Stosses bestimmt wird; denn es ist kein Grund vorhanden, welcher den Punkt bestimmen sollte, diese Ebene zu verlassen. Wir beschränken uns also auf zwei Coordinaten.

Die Bewegungsgleichungen sind

$$4) \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = R\dfrac{x}{r} = \dfrac{\partial U_1}{\partial r}\cdot\dfrac{x}{r}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = R\dfrac{y}{r} = \dfrac{\partial U_1}{\partial r}\cdot\dfrac{y}{r}, \end{cases}$$

aus diesen folgt, wie leicht zu sehen:

---

* Neumann, Principien der Electrodynamik, Tübingen 1868. — Vergl. auch Seegers, Inauguraldissertation: *De motu perturbationibusque planetarum etc.* Göttingen 1864.

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\frac{\partial U_1}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} = 2\frac{dU_1}{dt},$$

und durch Integration:

5) $$T = U_1 + c_1.$$

Es gilt also das Princip der lebendigen Kraft, welches nicht ohne Weiteres angewendet werden durfte. Beiläufig sei bemerkt, dass auch das Flächenprincip gilt, da es sich um eine Centralkraft handelt.

Neumann hat nun gefunden, dass man auf die Bewegungsgleichungen 4) kommt, wenn man in die Gleichung 1) statt des gewöhnlichen U_1 einsetzt:

6) $$U = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right),$$

und zwar ist er folgendermassen auf dieses U gekommen: Zieht das Centrum den Punkt xyz mit der Masse m nach dem Newton'schen Gesetze an, so gehört zur Entfernung r_0 das Potential $\frac{m}{r_0}$. Angenommen nun, das Potential käme nicht sofort zur Geltung, sondern würde mit endlicher Geschwindigkeit dem sich bewegenden Punkte zugeschickt, wie z. B. das Licht oder der Schall, so würde das zur Entfernung r_0 gehörende Potential den Punkt erst dann erreichen, wenn er sich in einer anderen Entfernung r befindet, so dass nicht $\frac{m}{r}$ das dort wirkende Potential ist, sondern $\frac{m}{r_0}$ oder, wie aus den Entwickelungen von Neumann hervorgeht, der Ausdruck

$$U = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right),$$

wo c die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich das Potential im Raume fortbewegt.

Dass man jetzt wirklich von Gleichung 1) auf die Gleichungen 4) kommt, ist leicht zu zeigen. Ist T die halbe lebendige Kraft, so ist

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m x'\,\delta x'\,dt + \int_{t_0}^{t_1} m y'\,\delta y'\,dt.$$

Die Integration durch Theile giebt für jedes Integral der rechten Seite ein neues Integral und einen vom Integral freien Theil. Der letztere fällt weg, da die Endpositionen nicht mit variirt werden, so dass stehen bleibt:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = -m\int_{t_0}^{t_1}(x''\,\delta x + y''\,\delta y)\,dt.$$

Aus $U = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right)$ folgt ferner

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial r}\delta r + \frac{\partial U}{\partial r'}\delta r' = -\frac{m}{r^2}\left(1+\frac{r'^2}{c^2}\right)\delta r + \frac{2mr'}{rc^2}\,.\,\delta r',$$

also:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} U\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{r^2}\left(1+\frac{r'^2}{c^2}\right)\delta r\,dt + \frac{2m}{c^2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{r'}{r}\,\delta r'\,dt.$$

Wendet man auf das letzte Integral die Integration durch Theile an und zieht man Alles zusammen, so folgt:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} U\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{r^2}\left(1-\frac{r'^2}{c^2}+\frac{2rr''}{c^2}\right)\delta r\,dt = \int_{t_0}^{t_1} R\,\delta r\,dt.$$

Demnach ist:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(mx''-R\frac{x}{r}\right)\delta x+\left(my''-R\frac{y}{r}\right)\delta y\right]dt = 0.$$

δx und δy sind aber unabhängig von einander, so dass sich folgende Gleichungen ergeben:

$$mx'' = R\frac{x}{r}, \quad my'' = R\frac{y}{r};$$

dies sind aber die obigen Bewegungsgleichungen.

Jetzt dürfen wir die Gleichung 1) zum Ausgangspunkte der Untersuchung nehmen.

§ 2.

Ableitung der Differentialgleichungen des Problems in independenten Coordinaten.

Als independente Coordinaten werden r und ϑ eingeführt durch die Gleichungen:

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

so dass $(T+U)$ eine Function von r, r', ϑ, ϑ' wird. Man bilde

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt$$

und wende die Integration durch Theile an, dann ergiebt sich, da die vom Integral freien Theile wegfallen, an Stelle von Gleichung 1) des § 1:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\frac{\partial(T+U)}{\partial r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+U)}{\partial r'}\right)\right]\delta r+\left[\frac{\partial(T+U)}{\partial\vartheta}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+U)}{\partial\vartheta'}\right)\right]\delta\vartheta\right\}dt.$$

Da δr und $\delta\vartheta$ unabhängig von einander sind, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+U)}{\partial r'}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'}\right) = 0.$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen in der neuen Form.

Der Werth von $(T+U)$ in den neuen Coordinaten ist:

$$(T+U) = r'^2\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{rc^2}\right) + \frac{mr^2\vartheta'^2}{2} + \frac{m}{r}.$$

Jetzt sind neue Grössen p einzuführen durch die Gleichungen

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial r'} = p_1, \qquad \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'} = p_2,$$

d. h.

$$p_1 = 2r'm\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right), \qquad p_2 = mr^2\vartheta'.$$

Bezeichnen wir nun $(T+U)$, sobald die neuen Grössen eingeführt sind, mit $|T+U|$, so erhalten wir:

$$|T+U| = \frac{p_1^2}{4m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right)} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + \frac{m}{r} = p_1 r' + p_2\vartheta' + \frac{m}{r}.$$

Für diesen Ausdruck gelten nun folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial |T+U|}{\partial p_1} = r', \qquad \frac{\partial |T+U|}{\partial p_2} = \vartheta',$$
$$\frac{\partial |T+U|}{\partial \vartheta} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta} = 0,$$
$$\frac{\partial |T+U|}{\partial r} = -\frac{\partial (T+U)}{\partial r} - \frac{2m}{r^2}.$$

Setzt man diese Resultate in die obigen Gleichungen der Bewegung ein, so ergeben sich folgende Differentialgleichungen des Problems:

1)
$$\begin{cases} \alpha) & \dfrac{\partial |T+U|}{\partial r} = -\dfrac{dp_1}{dt} - \dfrac{2m}{r^2}, \\ \beta) & \dfrac{\partial |T+U|}{\partial \vartheta} = -\dfrac{dp_2}{dt} = 0, \end{cases}$$

und dazu kommen noch:

2)
$$\begin{cases} \alpha) & \dfrac{\partial |T+U|}{\partial p_1} = \dfrac{dr}{dt}, \\ \beta) & \dfrac{\partial |T+U|}{\partial p_2} = \dfrac{d\vartheta}{dt}. \end{cases}$$

§ 3.

Aufstellung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Setzen wir:

$$1) \qquad V = \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt$$

und bilden wir δV, jedoch so, dass auch die Endpositionen variirt werden, so fallen bei der Integration durch Theile nicht mehr die vom Integral freien Ausdrücke weg, so dass wir haben:

$$\delta V = \left| \frac{\partial (T+U)}{\partial r'} \delta r + \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'} \partial \vartheta \right|_{t_0}^{t_1}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial (T+U)}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T+U)}{\partial r'} \right) \right] \delta r + \left[\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'} \right) \right] \delta \vartheta \right\} dt.$$

Nach dem Obigen ist der letztere Theil gleich Null; bezeichnen wir demnach mit r_0 und ϑ_0 die Anfangspositionen, mit r und ϑ die Endpositionen, so bleibt stehen:

$$\delta V = \frac{\partial (T+U)}{\partial r'} \delta r - \frac{\partial (T+U)}{\partial r'_0} \delta r_0 + \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'} \delta \vartheta - \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'_0} \delta \vartheta_0.$$

Betrachten wir aber V als Function der Anfangs- und Endpositionen und der verflossenen Zeit, so ist:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial r_0} \delta r_0 + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_0} \delta \vartheta_0 + \frac{\partial V}{\partial r} \delta r + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \delta \vartheta.$$

Vergleicht man die beiden letzten Ausdrücke und setzt man, da die Variationen willkürlich sind, die entsprechenden Factoren gleich, so entstehen folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial (T+U)}{\partial r'} = p_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'} = p_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_0} = -\frac{\partial (T+U)}{\partial r'_0} = -p_{0_1}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \vartheta_0} = -\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'_0} = -p_{0_2}.$$

Die p lassen sich demnach ersetzen durch partielle Differentialquotienten von V nach den independenten Coordinaten.

Wir betrachteten soeben V als Function der Anfangs- und Endcoordinaten und der verflossenen Zeit t; letztere ist in V sowohl explicite enthalten, als auch implicite in den Endcoordinaten, nicht aber in den Anfangscoordinaten, so dass

$$3a) \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Ferner giebt die Differentiation der Gleichung 1) nach der oberen Grenze t:

3b) $$\frac{dV}{dt} = T + U.$$

Durch Subtraction von 3a) und 3b) erhalten wir:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} r' + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \vartheta' - (T+U),$$

oder wenn man setzt:

$$\psi = \frac{\partial V}{\partial r} r' + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \vartheta' - (T+U) = p_1 r' + p_2 \vartheta' - |T+U|$$

$$= 2|T+U| - \frac{2m}{r} - |T+U| = |T+U| - \frac{2m}{r},$$

4) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

In diese Gleichung kann man an Stelle von r, r', ϑ und ϑ' einführen r, ϑ, p_1, p_2; p_1 und p_2 aber lassen sich ersetzen durch $\frac{\partial V}{\partial r}$ und $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$, so dass in Gleichung 4) nur noch vorkommen r, ϑ, t, $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$. Durch diese Transformationen geht also Gleichung 4) über in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit drei unabhängigen Variabelen, durch welche V definirt wird als Function von r, t und ϑ.

§ 4.

Beweis für die Anwendbarkeit der Hamilton'schen Methode auf unser Problem.

Es ist der Beweis für folgende Behauptung zu liefern:

Ist V eine allgemeine Lösung der obigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, d. h. ein Integral, welches ausser der additiven Constanten α noch zwei andere arbiträre Constanten α_1 und α_2 enthält, und setzen wir:

I) $$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2,$$

wo β_1 und β_2 neue willkürliche Constanten sind, und nehmen wir dazu aus Gruppe 2) des § 3 folgende Gleichungen:

II) $$\frac{\partial V}{\partial r} = p_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = p_2,$$

so wird behauptet, dass diese Gleichungen die Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen am Schluss von § 2 sind.

Beweis. Der Beweis ist geliefert, wenn gezeigt wird, dass die Differentiation der Gleichungen I) und II) nach t auf die obigen Differentialgleichungen führt.

Die Gleichungen I) gelten zunächst identisch für jedes beliebige t, z. B. auch für $(t + dt)$; differentiire ich also beiderseits vollständig nach t, so darf ich beide Seiten gleich setzen. Da nun t sowohl explicite in $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}$ vorkommt, als auch implicite (in r und ϑ), so ergiebt sich:

a)
$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}, \\ 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}. \end{cases}$$

Ferner darf ich die Gleichung 4) in § 3 partiell nach den α differentiiren, da die α willkürlich sind, also die Gleichung auch identisch für $(\alpha + d\alpha)$ gilt. Man erhält:

b)
$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \cdot \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1}, \\ 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \cdot \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2}. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\psi = \frac{\partial V}{\partial r} r' + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot \vartheta' - (T + U),$$

wo r', ϑ', $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$ vermittelst der Gleichungen:

$$r' = \frac{p_1}{2m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right)}, \qquad \vartheta' = \frac{p_2}{mr^2},$$

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial r}, \qquad p_2 = \frac{\partial V}{\partial \vartheta},$$

durch r, ϑ, p_1 und p_2 zu ersetzen sind. Hat man auf diese Weise ψ als Function von t, r, ϑ, p_1 und p_2 dargestellt, so sind offenbar α_1 und α_2 in ψ nur insofern enthalten, als sie in p_1 und p_2 vorkommen; die Gleichungen b) gehen also über in:

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 dt} + \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1},$$

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2},$$

oder in:

c)
$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_2}, \\ 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_2}. \end{cases}$$

Die Gleichungssysteme a) und c) haben dieselben Coefficienten. Giebt also die Auflösung derselben etwas Bestimmtes, so müssen sich für die Unbekannten dieselben Werthe ergeben, d. h. es muss sein:

5) $$\frac{dr}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_1},\qquad \frac{\partial\vartheta}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_2},$$

so dass wir die Auflösung der Gleichungen a) umgangen haben durch Aufstellung des Systems c). Etwas Bestimmtes aber geben die Gleichungen (insofern die Coefficienten derselben endlich bleiben, was immer angenommen wird) stets dann, wenn die Determinante der Coefficienten verschieden von Null ist, d. h. sobald

$$R=\Sigma\pm\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha_2}\right)=\Sigma\pm\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)\lesseqgtr 0.$$

„Wäre aber $R=0$, so wären die Grössen $\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}$ und $\frac{\partial V}{\partial\alpha_2}$, als Functionen von r und ϑ betrachtet, nicht unabhängig von einander, d. h. es müsste zwischen $\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}$, $\frac{\partial V}{\partial\alpha_2}$, α_1, α_2 und t eine Gleichung existiren, welche r und ϑ nicht enthielte. Ebenso wären $\frac{\partial V}{\partial r}$ und $\frac{\partial V}{\partial\vartheta}$, als Functionen von α_1 und α_2 betrachtet, nicht unabhängig von einander, und es müsste zwischen $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial\vartheta}$, r, ϑ und t eine Gleichung existiren, in welcher α_1 und α_2 nicht vorkämen. Man hätte also eine Gleichung von der Form:

$$0=F\left(t,\ r,\ \vartheta,\ \frac{\partial V}{\partial r},\ \frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right),$$

d. h. eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die vorausgesetzte Lösung V genügen müsste und welche $\frac{\partial V}{\partial t}$ nicht enthält. Dies ist aber unmöglich, wenn V wirklich eine vollständige Lösung von Gleichung 4) sein soll.“ Die Begründung davon ist wörtlich dieselbe, wie bei Jacobi S. 161 etc.

Sobald also V wirklich eine vollständige Lösung der betreffenden Gleichung ist, kann R nicht Null werden. Der Schluss auf das Bestehen der Gleichungen 5) war demnach ein berechtigter.

Sind nun die Gleichungen 5) identisch mit den Gleichungen 2) in § 2, nämlich mit

$$\frac{\partial|T+U|}{\partial p_1}=\frac{dr}{dt},\qquad \frac{\partial|T+U|}{\partial p_2}=\frac{d\vartheta}{dt},$$

so sind wirklich die Gleichungen 1) die Integralgleichungen der letzteren. Und dies ist der Fall, denn in § 3 war

$$\psi=|T+U|-\frac{2m}{r},$$

folglich

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_1}=\frac{\partial|T+U|}{\partial p_1}=\frac{dr}{dt},$$

und ebenso

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_2} = \frac{\partial |T+U|}{\partial p_2} = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Also: die Gleichungen I) sind die Integralgleichungen der Differentialgleichungen 2) in § 2.

Um dasselbe für die Gleichungen II) zu beweisen, differentiiren wir dieselben vollständig nach t und erhalten:

d)
$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}, \\ \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta\, \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial \vartheta}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta\, \partial \vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}. \end{cases}$$

Da

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial r} = \frac{\partial p_1}{\partial r}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial \vartheta} = \frac{\partial p_1}{\partial \vartheta}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta\, \partial \vartheta} = \frac{\partial p_2}{\partial \vartheta},$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta\, \partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r}$$

ist; da ferner nach den Gleichungen 5)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_1}, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_2},$$

so geht das System d) über in:

e)
$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial r}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial r}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta\, \partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial p_2}. \end{cases}$$

Die partielle Differentiation der Gleichung 4) nach r und ϑ giebt aber, da r und ϑ zunächst in $\frac{\partial V}{\partial t}$, dann aber in ψ sowohl explicite, als auch implicite in den p vorkommen,

f)
$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta\, \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \end{cases}$$

so dass wir durch Subtraction der Systeme e) und f) erhalten:

6)
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}.$$

Da jedoch $\psi = |T+U| - \frac{2m}{r}$ ist, so folgt aus 6)

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial |T+U|}{\partial r} - \frac{2m}{r^2}, \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial |T+U|}{\partial \vartheta} = 0. \end{cases}$$

Dies sind aber die Gleichungen 1) in § 2. Also: die Gleichungen II) sind die Integralgleichungen der entsprechenden Differentialgleichungen.

Damit ist der Beweis für die Anwendbarkeit der Hamilton'schen Methode auf unser Problem geliefert, und zwar in einer Form, in welcher er sich höchst einfach auf beliebig viele Variabelen ausdehnen lässt. Jetzt sind wir überzeugt davon, dass die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung richtige Resultate liefern wird.

§ 5.
Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Ersetzt man in der Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} r' + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \vartheta' - \frac{{p_1}^2}{4m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right)} - \frac{{p_2}^2}{2mr^2} - \frac{m}{r} = 0$$

r' und ϑ' durch die p, und dann p_1 und p_2 durch $\frac{\partial V}{\partial r}$ und $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$, so geht sie über in:

4*) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \cdot \frac{rc^2}{2m(rc^2+2)} + \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 \frac{1}{2mr^2} - \frac{m}{r} = 0.$$

t kommt nur in $\frac{\partial V}{\partial t}$, sonst nicht explicite vor, deshalb setzen wir versuchsweise $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha_1$, oder $V = \alpha_1 t + W$, wo α_1 eine willkürliche Constante, W aber constant nach t ist, so dass, da $\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \frac{\partial V}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r}$ ist, die Gleichung übergeht in:

$$\alpha_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 \cdot \frac{rc^2}{2m(rc^2+2)} + \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 \cdot \frac{1}{2mr^2} - \frac{m}{r} = 0.$$

Da ϑ nur in $\frac{\partial W}{\partial \vartheta}$, sonst nicht explicite vorkommt, so setzen wir:

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \alpha_2, \qquad W = \alpha_2 \vartheta + Z,$$

wo Z constant nach t und ϑ ist, also $\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial r}$. Die Gleichung geht über in

$$\alpha_1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 \frac{rc^2}{2m(rc^2+2)} + \frac{{\alpha_2}^2}{2mr^2} - \frac{m}{r} = 0,$$

also

$$\frac{\partial Z}{\partial r} = \sqrt{2m}\,\sqrt{\left(\frac{m}{r} - \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{2mr^2}\right)\left(1 + \frac{2}{rc^2}\right)},$$

d. h.

$$Z = \sqrt{2m}\int \sqrt{\left(\frac{m}{r} - \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{2mr^2}\right)\left(1 + \frac{2}{rc^2}\right)}\,dr,$$

so dass sich als allgemeine Lösung der Gleichung 4*) ergiebt

A) $$V = \alpha_1 t + \alpha_2 \vartheta + \sqrt{2m}\int \sqrt{\left(\frac{m}{r} - \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{2mr^2}\right)\left(1 + \frac{2}{rc^2}\right)}\,dr.$$

Die Integralgleichungen für das mechanische Problem sind, wie oben nachgewiesen:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1 = t + \frac{\partial Z}{\partial \alpha_1}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2 = \vartheta + \frac{\partial Z}{\partial \alpha_2},$$

also

B) $$t = \beta_1 + m\int \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{rc^2}}\cdot dr}{\sqrt{\frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m}}.$$

Dieses Integral giebt den Zusammenhang zwischen t und r.

Ferner erhalten wir:

C) $$\vartheta = \beta_2 + \alpha_2\int \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{rc^2}}\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m}},$$

wodurch der Zusammenhang zwischen ϑ und r gegeben ist.

Führt man in das letzte Integral $Z = \frac{1}{r}$ ein, so geht die Gleichung über in

C*) $$\vartheta = \beta_2 - \alpha_2\int \frac{\sqrt{1 + \frac{2Z}{c^2}}\,dZ}{\sqrt{2m^2 Z - 2\alpha_1 m - \alpha_2^2 Z^2}}.$$

§ 6.

Constantenbestimmungen etc.

Aus Gleichung B) folgt:

$$dt = \frac{m\sqrt{1 + \frac{2}{rc^2}}\,dr}{\sqrt{\frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m}}.$$

Aus Gleichung C) folgt:

$$d\vartheta = \frac{\alpha_2\sqrt{1 + \frac{2}{rc^2}}\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m}}$$

und durch Division der beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\alpha_2 = m r^2 \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Da aber $r^2 d\vartheta$ der doppelte Flächeninhalt eines Elementes ist, welches der Radius vector beschreibt, so ist α_2 dieselbe Constante, welche uns das Flächenprincip giebt. Dass letzteres hier gilt, wurde schon oben erwähnt.

Ist also der Anfangszustand gegeben durch

$$t_0,\ r_0,\ \vartheta_0, \qquad v_0 = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=t_0},$$

und den Winkel β_0, welchen die Anfangsgeschwindigkeit mit dem Radius vector r_0 bildet, so dass

$$ds_0 \sin\beta_0 = r_0 d\vartheta_0, \qquad ds_0 \cos\beta_0 = dr_0,$$

und demnach

$$v_0 \cos\beta_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{t_0}, \qquad v_0 \sin\beta_0 = r_0 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_{t_0},$$

so ergiebt sich:

$$\alpha_2 = m r_0^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_{t_0} = m r_0 v_0 \sin\beta_0.$$

Ferner folgt aus

$$v\cos\beta = \frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m}}{m\sqrt{1+\frac{2}{rc^2}}},$$

$$m^2\left(1+\frac{2}{rc^2}\right)v^2\cos^2\beta = \frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m,$$

oder wenn der Werth für α_2 eingesetzt wird:

$$2\alpha_1 = -mv^2 + \frac{2m}{r}\left(1 - v^2\cos^2\beta\,\frac{1}{rc^2}\right)$$

$$= -mv^2 + \frac{2m}{r}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right) = -mv^2 + 2U_1,$$

also $T = U_1 - \alpha_1$, so dass α_1 die Constante ist, welche aus dem Princip der lebendigen Kraft hervorgeht. Sie bestimmt sich aus dem Anfangszustande als

$$2\alpha_1 = -mv_0^2 + \frac{2m}{r_0}\left(1 - v_0^2\cos^2\beta_0\,\frac{1}{r_0 c^2}\right).$$

Zugleich hat es sich an dieser Stelle bestätigt, dass das Princip der lebendigen Kraft für unser Problem Geltung hat.

Um die Bedeutung der Constanten β festzustellen, müssen wir den Integralen bestimmte Grenzen geben. Setzen wir als untere Grenze einen bestimmten Zahlenwerth r_0 fest, so ergiebt sich aus:

B) $$t = m \int \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{r c^2}}\, dr}{\sqrt{\frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} = 2\alpha_1 m}} + \beta_1,$$

dass für $r = r^0$, d. h. $t = t_0$, rechts nur stehen bleibt β_1, so dass β_1 der Anfangswerth von t ist. Ebenso folgt aus C), dass β_2 der Anfangswerth von ϑ ist.

Da t und β stets reell sein müssen, so folgt aus Gleichung B) (wo die im Zähler stehende Wurzel nie imaginär wird, weil r stets positiv ist), dass die im Nenner stehende Wurzel nie imaginär werden darf, woraus sich für r ein Maximal- und Minimalwerth ergeben wird. Diese bestimmen sich durch die Gleichung

$$\frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m = 0$$

als

$$r_1 = \frac{m}{2\alpha_1} + \frac{1}{2\alpha_1}\sqrt{m^2 - \frac{2\alpha_1 \alpha_2^2}{m}}$$

und

$$r_2 = \frac{m}{2\alpha_1} - \frac{1}{2\alpha_1}\sqrt{m^2 - \frac{2\alpha_1 \alpha_2^2}{m}},$$

sind also, wenn c gegeben ist, leicht aus dem Anfangszustande zu berechnen.

Die möglichen Lagen des angezogenen Punktes sind demnach beschränkt auf einen Ring zwischen zwei concentrischen Kreisen, die mit den Radien r_1 und r_2 um das anziehende Centrum geschlagen sind.

Was die Ausführung der elliptischen Integrale anbetrifft, so verweisen wir auf die Dissertation von Seegers, wo sie elegant behandelt sind.

Für das Maximum und Minimum des Abstandes wollen wir die Namen Aphelium und Perihelium beibehalten. Seegers hat nachgewiesen, dass aufeinanderfolgende Perihelia und Aphelia nicht um dem Winkel π, wie bei dem Newton'schen Gesetz, sondern um einen andern von einander abstehen.

Diese Bemerkung soll mit Hilfe des Obigen dazu dienen, uns ein Bild von der stattfindenden Bewegung zu verschaffen.

Aus der Gleichung des Flächenprincips

$$m r^2 \vartheta' = \alpha_2$$

folgt zunächst, dass ϑ' nie sein Zeichen ändert, dass also die Bewegung stets in demselben Sinne vor sich geht. Sie umschliesst stets den kleinen Kreis und wird von dem grösseren umschlossen.

Ferner ist auf Grund desselben Princips die Geschwindigkeit umgekehrt proportional der Entfernung des Centrums von der Tangente der Bahn, so dass sie am langsamsten im Aphelium ist. Endlich ergiebt sich, dass zu demselben r dasselbe ϑ' gehört.

Aus dem Princip der lebendigen Kraft folgt durch Elimination der Constanten α

$$T - T^1 = U_1 - U_1^1$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(r'^2 + r^2\vartheta'^2\right) - \left(r_1'^2 + r_1^2\vartheta_1'^2\right)\right] = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right) - \frac{1}{r_1^2}\left(1 - \frac{r_1'^2}{c^2}\right).$$

Für gleiche r ergiebt sich also, da zu denselben gleiche ϑ' gehören,

$$\tfrac{1}{2}\left(r'^2 - r_1'^2\right) = \frac{1}{c^2 r^2}\left(r_1'^2 - r'^2\right),$$

eine Gleichung, die nur möglich ist, wenn

$$r' = \pm r'_1.$$

Folglich gehören zu gleichen r stets gleiches ϑ' und gleiches r' (abgesehen vom Vorzeichen), also auch gleiches $\frac{ds}{dt}$ und abgesehen vom Zeichen gleiches $\frac{dr}{d\vartheta}$ und $\frac{dr}{rd\vartheta}$; in Worten also:

Wird irgend ein um das Centrum geschlagener Kreis von dem angezogenen Punkte öfters durchschnitten, so geschieht dies stets mit derselben Geschwindigkeit und, abgesehen vom Vorzeichen, unter demselben Winkel.

Daraus ergeben sich folgende wichtige Eigenschaften der Bahn:

Ist P ein Perihelium und A das darauf folgende Aphelium, so ist der Weg von A nach dem folgenden Perihelium P_1 congruent dem Wege von P nach A und symmetrisch gegen die Linie AC gelegen, wenn C das Centrum bedeutet. Der Weg von P_1 nach A_1 ist congruent dem von A nach P_1 und symmetrisch gegen die Linie $P_1 C$ gelegen u. s. w.

Die Aphelia folgen also in gleichen Winkelabständen auf einander, ebenso die Perihelia unter denselben Winkelspannungen. Ist diese letztere γ und $\frac{\gamma}{\pi}$ irrational, so hat die Bahn unendlich viele congruente Arme; ist $\frac{\gamma}{\pi}$ rational, so ist die Anzahl dieser Arme endlich und die Bahn läuft in sich selbst zurück. Sie hat zunächst so viele Symmetrieaxen durch c, als Perihelia und Aphelia zusammengenommen. Verbindet man ausserdem einen Punkt, in welchem zwei Arme der Bahn sich schneiden, mit dem Centrum, so entsteht wieder eine Symmetrieaxe. Auch von dieser letzteren Gruppe haben wir entweder eine endliche oder eine unendliche Anzahl.

Für $c = \infty$, wo also das Potential keine Zeit gebraucht, um den angezogenen Punkt zu erreichen, stimmt das Gesetz mit dem Newton'schen überein, und die Bahn des Punktes wird, wenn nur r_1 endlich bleibt, eine Ellipse. Dann ist der Abstand der einzelnen Aphelia unendlich klein, d. h. $\gamma = 0$. Ist c sehr gross, so ist die Bahn nahezu eine Ellipse und γ wird sehr klein sein. Ein ungefähres Bild der Bahn für sehr grosses c (und c ist in Wahrheit sehr gross) könnte man also etwa auf folgendem Wege

erhalten: Es bewege sich ein Punkt nach dem Newton'schen Gesetze auf einer Ellipse, während dieser Bewegung aber drehe sich die Ellipse sehr langsam um den Brennpunkt, in welchem sich die anziehende Kraft befindet.

§ 7.

Dasselbe Problem für drei Coordinaten.

Um zu zeigen, wie schnell die Hamilton'sche Methode zum Ziele führt, wollen wir dasselbe Problem noch einmal kurz für drei Coordinaten durchführen.

Die independenten Coordinaten werden eingeführt durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\varphi\sin\psi,$$

so dass

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2\sin^2\varphi\,\psi'^2,$$

also

$$T = \frac{m}{2}\left(r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2\sin^2\varphi\,\psi'^2\right).$$

Ferner ist

$$U = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right),$$

also

$$1) \qquad (T+U) = r'^2 m\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{r c^2}\right) + \frac{m r^2}{2}\varphi'^2 + \frac{m r^2\sin^2\varphi}{2}\psi'^2 + \frac{m}{r}.$$

Die Einführung der p geschieht durch die Gleichungen

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial r'} = p_1 = 2 m r'\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{r c^2}\right), \quad \text{also } r' = \frac{p_1}{2m\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{r c^2}\right)},$$

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial \varphi'} = p_2 = m r^2 \varphi', \qquad \text{also } \varphi' = \frac{p_2}{m r^2},$$

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial \psi'} = p_3 = m r^2 \sin^2\varphi\,\psi', \qquad \text{also } \psi' = \frac{p_3}{m r^2 \sin^2\varphi}.$$

Das transformirte $(T+U)$ wird demnach

$$2) \qquad |T+U| = \frac{p_1^2}{4m\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{r c^2}\right)} + \frac{p_2^2}{2 m r^2} + \frac{p_3^2}{2 m r^2 \sin^2\varphi} + \frac{m}{r}.$$

Dieses hat die Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial |T+U|}{\partial p_1} = \frac{2 p_1}{4m\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{r c^2}\right)} = r'; \quad \frac{\partial |T+U|}{\partial p_2} = \frac{2 p_2}{2 m r^2} = \varphi';$$

$$\frac{\partial |T+U|}{\partial p_3} = \frac{2 p_3}{2 m r^2 \sin^2\varphi} = \psi';$$

ferner, dass

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial r} = -\frac{\partial|T+U|}{\partial r} - \frac{2m}{r^2}; \quad \frac{\partial(T+U)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial|T+U|}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial \psi} = -\frac{\partial|T+U|}{\partial \psi} = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen von der Form

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i'}\right) = 0,$$

wo die q die independenten Coordinaten sind, gehen über in

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \alpha) & \dfrac{\partial|T+U|}{\partial r} = -\dfrac{dp_1}{dt} - \dfrac{2m}{r^2}, \\ \beta) & \dfrac{\partial|T+U|}{\partial \varphi} = -\dfrac{dp_2}{dt}, \\ \gamma) & \dfrac{\partial|T+U|}{\partial \psi} = -\dfrac{dp_3}{dt} = 0, \end{cases}$$

wozu noch treten

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \alpha) & \dfrac{\partial|T+U|}{\partial p_1} = r'. \\ \beta) & \dfrac{\partial|T+U|}{\partial p_2} = \varphi'. \\ \gamma) & \dfrac{\partial|T+U|}{\partial p_3} = \psi'. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = V,$$

so ergiebt sich

$$\text{III.} \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial(T+U)}{\partial r'} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial(T+U)}{\partial \varphi'} = p_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial(T+U)}{\partial \psi'} = p_3.$$

Ferner folgt aus

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\cdot\frac{d\psi}{dt}$$

und

$$\frac{dV}{dt} = T+U$$

die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + p_1 r' + p_2 \varphi' + p_3 \psi' - (T+U) = 0,$$

oder

$$\text{IV.} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \frac{r c^2}{2m(2+rc^2)} + \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{2mr^2} + \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m\sin^2\varphi} - \frac{m}{r} = 0.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung 1ter Ordnung mit vier Variabelen. Um sie zu integriren, setzen wir versuchsweise

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha_1, \quad \text{also } V = \alpha_1 t + W,$$

so dass die Gleichung übergeht in

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 \frac{rc^2}{2+rc^2} + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{r^2} + \left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}\right] = \frac{m^2}{r} - \alpha_1 m.$$

Wir fügen beiderseits $-\frac{\alpha_2^2}{r^2}$ hinzu und setzen

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 \frac{rc^2}{2+rc^2} = \frac{m^2}{r} - \alpha_1 m - \frac{\alpha_2^2}{r^2},$$

oder

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{2\left(\frac{m^2}{r} - \alpha_1 m - \frac{\alpha_2^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{2}{rc^2}\right)},$$

d. h.

$$W = \int \sqrt{\left(\frac{2m^2}{r} - 2\alpha_1 m - \frac{2\alpha_2^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{2}{rc^2}\right)}\, dr + P,$$

so geht die Gleichung über in

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{r^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial \psi}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}\right] - \frac{\alpha_2^2}{r^2} = 0,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \psi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right] = \alpha_2^2.$$

Fügt man beiderseits $-\frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \varphi}$ hinzu und setzt man

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2 = \alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \varphi},$$

also

$$P = \int \sqrt{2\alpha_2^2 - \frac{2\alpha_3^2}{\sin^2 \varphi}}\, d\varphi + Z,$$

so verwandelt sich die Gleichung in

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \psi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \varphi}$$

oder

$$Z = \int \alpha_3 \sqrt{2}\, d\psi = \psi \alpha_3 \sqrt{2} + (\alpha).$$

Demnach ist das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung

$$\text{A)} \qquad V = \alpha_1 t + \int \sqrt{\left(\frac{2m^2}{r} - 2\alpha_1 m - \frac{2\alpha_2^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{2}{rc^2}\right)}\, dr$$
$$+ \int \sqrt{2\alpha_2^2 - \frac{2\alpha_3^2}{\sin^2 \varphi}}\, d\varphi + \psi \alpha_3 \sqrt{2} + (\alpha),$$

während die Differentialgleichungen des Problems sind

B) $$\beta_1 = t - m \int \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{r c^2}}\, dr}{\sqrt{\frac{2m^2}{r} - 2\alpha_1 m - \frac{2\alpha_2^2}{r^2}}},$$

C) $$\beta_2 = -\int \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{r c^2}}\, dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m^2}{r} - 2\alpha_1 m - \frac{2\alpha_2^2}{r^2}}} + \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\alpha_2^2 - \frac{2\alpha_3^2}{\sin^2\varphi}}}.$$

Das letztere Integral geht durch die Substitution

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_2^2}} \cdot \cos\eta,$$

$$\sin\varphi\, d\varphi = \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\, \sin\eta\, d\eta$$

über in

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha_2^2}} \int d\eta = \left| \frac{\eta}{\sqrt{2\alpha_2^2}} \right|_{Gr_1}^{Gr_2},$$

so dass wir erhalten:

C*) $$\beta_2 = -\int \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{r c^2}}\, dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m^2}{r} - 2\alpha_1 m - \frac{2\alpha_2^2}{r^2}}} + \left| \frac{\eta}{\sqrt{2\alpha_2^2}} \right|_{Gr_1}^{Gr_2}.$$

Die letzte Gleichung endlich ist

D) $$\psi - \beta_3 = \alpha_3 \int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\varphi}}}.$$

Führt man hier $\mathit{cotg}\,\varphi$ als Variabele ein, so entsteht

$$\psi - \beta_3 = -\alpha_3 \int \frac{d\,\mathit{ctg}\,\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_3^2\,\mathit{ctg}^2\varphi}} = -\arccos\left(\sqrt{\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}}\,\mathit{cotg}\,\varphi\right),$$

woraus zunächst folgt

E) $$\cos(\psi - \beta_3) = \sqrt{\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}} \cdot \mathit{cotg}\,\varphi,$$

so dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet.

Da φ nur Werthe zwischen 0 und 180° annimmt, so ergiebt sich aus den nach φ genommenen Integralen, dass der Minimalwerth von $\sin\varphi$ ist $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$. Ist also J die Neigung der Ebene der Bahn gegen die Ekliptik, für welche $\varphi = 90°$ ist, so ist das Minimum von $\sin\varphi$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \sin(90° - J) = \cos J.$$

Da also

$$\sqrt{\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2-\alpha_3^2}}=\sqrt{\frac{\alpha_2^2\cos^2 J}{\alpha_2^2-\alpha_2^2\cos^2 J}}=\pm\,\mathrm{cotg}\,J$$

ist, so lässt sich Gleichung E) auch schreiben

E*) $$\cos(\psi-\beta_3)=\pm\,\mathrm{cotg}\,J\,.\,\mathrm{cotg}\,\varphi.$$

Für $\varphi=90^0$ ist $\cos(\psi-\beta_3)=0$, also $(\psi-\beta_3)=\pm 90^0$. Das zu $\varphi=90^0$ gehörende ψ ist aber die Länge des auf-, resp. absteigenden Knotens, d. h. β_3 ist die Länge des aufsteigenden Knotens $\mp 90^0$.

Geben wir nun, um die Bedeutung der sämmtlichen Constanten kennen zu lernen, den unteren Grenzen der Integrale bestimmte Zahlenwerthe, so folgt aus Gleichung D), dass β_3 der Anfangswerth von ψ ist. Die Anfangslage des Planeten ist also der tiefste oder höchste Punkt der Bahn. Daraus folgt, dass

$$\varphi_0=\left(\frac{\pi}{2}\pm J\right)$$

ist. Letzteres kann man auch aus Gleichung E*) ablesen, denn da

$$\psi_0-\beta_3=0$$

ist, so folgt

$$1=\pm\,\mathrm{cotg}\,J\,\mathrm{cotg}\,\varphi,$$

also, da φ nur positive Werthe zwischen 0^0 und 180^0 annimmt,

$$\varphi_0=\left(\frac{\pi}{2}\pm J\right).$$

β_2 würde sich aus Gleichung C*) als Null ergeben. Um dies zu verificiren, können wir ähnlich, wie bei Jacobi S. 188, folgende Betrachtung anstellen:

Aus

$$\cos\varphi_0=\cos\left(\frac{\pi}{2}\mp J\right)=\sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}$$

und der obigen Substitution

$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\,.\,\cos\eta$$

ergiebt sich, dass der Anfangswerth von η Null ist, also Gleichung C*) übergeht in

$$\beta_2=-\int_{r^2}^{}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{r\,c^2}}\,.\,dr}{\sqrt{\frac{2\,m^2}{r}-2\,\alpha_1 m-\frac{2\,\alpha_2^2}{r^2}}}+\frac{\eta}{\sqrt{2\,\alpha_2^2}}.$$

Nun ist aber φ die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, dessen Katheten η und $(90^0-\eta)$ sind (vergl. Zeichnung bei Jacobi). η ist also gleich 90^0 vermindert um die Entfernung des Planeten vom aufsteigenden Knoten. Für $r=r_0$ verschwindet das Integral und η geht über in 90^0 vermindert um die Entfernung der Anfangslage des Planeten vom aufstei

genden Knoten, so dass sich für β_2 folgende geometrische Bedeutung ergiebt:

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2\,\alpha_2^2}}\left[90^0 - \begin{pmatrix}\text{Entfernung der Anfangslage des Planeten}\\ \text{vom aufsteigenden Knoten}\end{pmatrix}\right].$$

Diese Entfernung beträgt aber 90^0, also ist wirklich $\beta_2 = 0$.

Differentiirt man die Gleichungen B), C) und D) nach den entsprechenden Variabelen und vergleicht man die Resultate, so ergiebt sich, dass

$$\frac{dt}{m\,r^2} = \frac{d\psi}{\alpha_3}\sin^2\varphi$$

oder

$$\frac{\alpha_2}{m}\,dt = r^2\sin^2\varphi\,d\psi.$$

Demnach ist $\frac{\alpha_3}{m}$ die Projection der doppelten Flächengeschwindigkeit auf die xy-Ebene, die wirkliche doppelte Flächengeschwindigkeit aber muss sein

$$\frac{\alpha_3}{m}\cdot\frac{1}{\cos J} = \frac{\alpha_3}{m}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_2}{m};$$

α_2 also behält die Bedeutung, wie in § 6; α_3 ergiebt sich aus der Gleichung $\alpha_3 = \alpha_2\cos J$, α_1 endlich ist wiederum die aus dem Princip der lebendigen Kraft entspringende Constante. Diese Constanten ergeben sich sämmtlich aus dem Anfangszustande.

In Betreff der Ausführung der elliptischen Integrale können wir wiederum auf Seegers verweisen.

Anhang.

Da in unserem Probleme t nicht explicite vorkommt und ausserdem das Princip der lebendigen Kraft gilt, so lässt sich alles das, was Jacobi in der 21. Vorlesung sagt, auf dasselbe ausdehnen, so dass man den Weg zur partiellen Differentialgleichung bedeutend abkürzen kann.

Man führe eine neue unabhängige Variabele α durch die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$ ein und setze für V eine neue Function $W = V - t\alpha = V - t\frac{\partial V}{\partial t}$, so dass $t = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ wird und Gleichung

1) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$$

übergeht in eine Gleichung von der Form

2) $$\alpha + \psi\left(q_1 \dots q_\nu \frac{\partial W}{\partial q_1} \dots \frac{\partial W}{\partial q_\nu}\right) = 0$$

Ist W durch Integration ermittelt, so lässt sich leicht zeigen, dass die Integralgleichungen sind

3)
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}=\beta_1, \ldots, \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\nu-1}}=\beta_{\nu-1}, \frac{\partial W}{\partial \alpha}=\tau-t, \\ \frac{\partial W}{\partial q_1}=p_1, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_{\nu-1}}=p_{\nu-1}, \frac{\partial W}{\partial q_\nu}=p_\nu. \end{array}\right.$$

Nun lautet aber das Princip der lebendigen Kraft

4)
$$0=\alpha+T-U,$$

und es lässt sich zeigen, dass die Gleichungen 2) und 4) identisch sind.

Für alle Probleme, bei denen es sich um Anziehungen nach dem Weber'schen Gesetze handelt, lässt sich also, wenn t nicht explicite vorkommt und das Princip der lebendigen Kraft bestehen bleibt, die partielle Differentialgleichung auf folgendem Wege finden:

Man bringe in der Gleichung der lebendigen Kraft die Transformationen der Hamilton'schen Methode an und setze $p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}$, so erhält man sofort die partielle Differentialgleichung 1ter Ordnung, aus welcher dann die Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen folgen.

Um dies für unser Problem zu zeigen und dabei die früheren Transformationen zu benutzen, führen wir in Gleichung 4) ein

$$U=-U_1+\frac{2m}{r},$$

so dass sie übergeht in

5)
$$T+U-\frac{2m}{r}=-\alpha_1$$

oder, nach Gleichung 2) in § 7,

$$\frac{{p_1}^2}{4m\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{rc^2}\right)}+\frac{{p_2}^2}{2mr^2}+\frac{{p_3}^2}{2mr^2\sin^2\varphi}-\frac{m}{r}=-\alpha_1.$$

Setzt man also $p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}$, so entsteht

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2\frac{rc^2}{2+rc^2}+\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2}+\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\right]-\frac{m^2}{r}-m\alpha_1.$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der in § 7 für W abgeleiteten.

VITA.

Natus sum Gustavus Holzmüller anno h. s. XLIV die II. m. Januarii Merseburgi patre Theophilo, matre Paulina e gente Beck, quos parentes dilectissimos adhuc vivos pio gratoque animo veneror.

Fidei addictus sum evangelicae.

Primis litterarum elementis in scholis publicis, rectore Lüben tum florentibus, instructus, per sex annos frequentavi Gymnasium Merseburgense, cui praefuit Prof. Dr. Scheele.

Testimonio maturitatis ornatus Halas me contuli, ubi ab Ill. Heine, Rectore tunc magnifico, in numerum civium academicorum receptus, et matheseos et rerum naturalium studio per quatuor annos et dimidium operam dedi.

Docuerunt me disciplinas mathematicas viri Ill. Heine, Rosenberger, Roch, Schwarz, Thomae; physicen experimentalem Ill. Knoblauch; botanicen viri Ill. de Schlechtendal, de Bary; zoologiam Ill. Giebel; mineralogiam Ill. Girard; philosophiam viri Ill. Erdmann, Schaller.

Seminariis math. et phys. interfui virorum Ill. Heine, Schwarz, Knoblauch.

Quibus omnibus viris Ill. optime de me meritis imprimis Ill. Heine et Ill. Knoblauch, qui benevolentissime tironem adjuverunt, summas quas possum gratias ago.

THESES.

I.

Rerum naturalium disciplinas eatenus tantum pro exactis haberi posse, quatenus rationi mathematicae subjiciantur.

II.

Prima elementa theoriae sectionum conicarum in gymnasiis esse tractanda.

III.

Contemplationem corporum optimam esse introductionem in disciplinam geometricam.